中 山 大 学

2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：861

科目名称：高等代数

考试时间：2017年12月24日下午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

符号说明：试卷中 N, Q, R, C 分别表示自然数集，有理数域，实数域和复数域；F 表示一般数域；如不言明矩阵皆为数域 F 上的矩阵，$rank(A)$ 表示矩阵或者线性变换 A 的秩.

1.（10分）设 $f(x)$，$g(x)$ 是数域 F 上的多项式，$u(x)=(x^2+1)f(x)+(x^2+x+1)g(x)$，$v(x)=xf(x)+(x+1)g(x)$，证明：$(f(x),g(x))=(u(x),v(x))$.

2.（20分）设 $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$，$g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$，

（1）求 $f(x)$ 的所有有理根；

（2）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有公共复根.

3.（10分）求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆.

4.（10分）在空间直角标架下求通过点（1，1，1），（1，1，-1），（1，-1，1）和（-1，0，0）的球面方程.

5.（20分）设 $A=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2t+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & nt+1 \end{pmatrix}$，求 A 的行列式，并指出 t 取何值时 A 正定.

6.（30分）设实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，

(1) 求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

(2) 试求实向量空间 $\{\sum_{i=0}^{m} a_i A^i \mid a_i \in R, m \in N\}$ 的维数与一组基.

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

7.（10 分）设 A, B 为 n 阶方阵，满足条件 $AB-BA=A$，判断 A 是否可逆,并说明你的理由.

8.（10 分）设 A 为 n 阶方阵，$m(x)$ 为 A 的最小多项式，$f(x)$ 为次数大于 0 的多项式. 若 $(f(x),m(x))=d(x)$. 证明 $rank(f(A))=rank(d(A))$.

9.（20 分）（1）设 n 阶实对称矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 正定， 证明 $\det A \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（2）设 B，D 分别为 n 阶和 m 阶实方阵，且实矩阵 $H=\begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$ 正定，

证明：$\det H \le \det B \cdot \det D$.

10.（10 分）设 σ 是 n 维实向量空间 V 上的线性变换，并且有正整数 m 使得 σ^m 是 V 上的恒等变换. 证明 V 中存在一个基使得 σ 在其上的矩阵为正交矩阵.