

# 江西师范大学 2018 年硕士研究生入学考试试题 (B 卷)

科目代码: 721 科目名称: 数学分析  
适用专业: 070100 数学

注: 考生答题时, 请写在考点下发的答题纸上, 写在本试题纸或其他答题纸上的一律无效。

(本试题共 2 页)

## 一、填空题: (每小题 6 分, 共 30 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \sin^{2n} n + \cos^{4n} n} =$  \_\_\_\_\_

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - e^x \sin x}{x^3} =$  \_\_\_\_\_

3、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$  \_\_\_\_\_

4、设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f''(0) =$  \_\_\_\_\_

5、曲线  $x^2 + y^2 = \sin x + y$  在点  $(0,0)$  的切线方程为 \_\_\_\_\_

## 二、计算题: (每小题 10 分, 共 30 分)

1、求  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$ , 其中  $n$  为正整数,  $a$  为正的常数.

2、求曲线积分  $I = \int_L (\cos y - y^2) dx - x \sin y dy$ , 其中  $L$  是曲线  $y = \sin x$  从点  $O(0,0)$  到点  $A(\pi,0)$  的一段.

3、设  $a > 0$  是常数, 计算积分  $\iint_{x^2+y^2 \leq ax} (x+y) dx dy$ .

## 三、综合题: (每小题 15 分, 共 90 分)

1、证明不等式:  $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

2、设  $a_1 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{2a_n + 6}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求其极限.

3、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明不等式  $\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$ , 其中等

号仅在  $f(x)$  为常量函数时成立.

4、设  $\alpha > \frac{1}{2}$ , 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  可微.

5、求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ .

6、设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_{n+1}(x) = \int_x^1 f_n(t) dt$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.