中 山 大 学

2017年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：862

科目名称：高等代数

考试时间：2016年12月25日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

符号说明：试卷中Q, R, C分别表示有理数域，实数域和复数域；F表示一般数域.

1. （20分）设$f(x)=x^4+3x-2$，$g(x)=3x^3-x^2-7x+4$.

（1）求$f(x)$与$g(x)$首一的最大公因式(f,g)，并求$u(x),v(x)$使$uf+vg=(f,g)$；

（2）把$g(x)$分别在数域C，R及Q上分解为不可约因式的乘积.

2. （20分）求下列矩阵的行列式：

(1) $A=\begin{pmatrix}1823 & 823 & 23 & 3\\ 1549 & 549 & 49 & 9\\ 1667 & 667 & 67 & 7\\ 1986 & 986 & 86 & 6\end{pmatrix}$,　　(2) $B=\begin{pmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a\end{pmatrix}_{n\times n}$.

3. (20分) 设有数域F上的齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+\cdots x_n=0,\\ x_1+ax_2+\cdots x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1+x_2+\cdots ax_n=0,\end{cases}$$

$n\geq 2$. 试讨论a为何值时，方程组仅有零解，有无穷多解？对于有无穷多解的情况给出方程组的基础解系.

4. (20分) 设有实矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵P使P^TAP为对角矩阵, 这里P^T指P的转置,

(2) 试求正定矩阵B使$B^2=A$.

5. (20分) 设复矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

(1) 求A的Jordan标准形,

(2) 求A的最小多项式以及A^{100}.

6. (10 分) 设 A 为数域 F 上的一个 n 阶方阵. 证明 A 的秩为1当且仅当存在非零的 n 维列向量 α，β，使得 $A=\alpha\beta^T$.

7. (10 分) 设 σ，τ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，id_V 是 V 上的恒等变换. 证明若 $\sigma\tau=id_V$ 则有 $\tau\sigma=id_V$.

8. (20 分) 设 V 为一个 n 维欧几里得空间，σ 为 V 上的一个线性变换. 若有单位向量 η 使得 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$，则称 σ 为镜面反射. 这里 (η,α) 表示 η 和 α 的内积.

(1) 若 σ 是镜面反射，证明 V 有正交分解 $V=\ker(id_V+\sigma)\oplus\ker(id_V-\sigma)$. 这里 id_V 表示 V 上的恒等变换. 对于线性变换 σ，$\ker\sigma$ 表示 σ 的核空间.

(2) 若 α，β 为 V 上两个线性无关的单位向量，求一个镜面反射 τ 使得 $\tau(\alpha)=\beta$.

9. (10分) 设 A 是一个 n 阶实矩阵，其有 n 个绝对值小于 1 的实特征值，证明:

$$\ln(\det(I-A))=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}tr(A^k).$$

其中 ln 为自然对数，I 表示 n 阶单位矩阵，$\det A$ 表示 A 的行列式，$tr(A)$ 表示 A 的迹，即其对角线上元素之和.