中 山 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：664

科目名称：数学分析

考试时间：2018 年 12 月 23 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

共十二题，总分 150 分

一、计算题：请写出必要的计算过程。每题 6 分，共 24 分。

（1）设 $a_1,a_2,\cdots,a_k>0$, k 是固定自然数，求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{n}\right)^n.$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})$, 其中 $a>0$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Gamma\frac{2nx}{1+n^2y^n}dx$, 其中 Γ 为沿 $y=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧.

（4）$\int\frac{1}{x(x^{10}+1)}dx.$

二、（16 分）讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

三、（10 分）极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)$ 是否存在?试说明理由.

四、（10 分）设 $f(x)=\frac{x^4}{1+x^3}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

五、（10 分）计算第二型曲线积分 $\oint_{\Gamma^+}\frac{xdy-ydx}{[(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2]}, (\alpha\delta-\beta\gamma\neq0)$

其中 Γ^+ 为椭圆 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$, 取逆时针方向.

六、（15 分）求 $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, (a,b>0)$ 的极大值点和极小值点.

七、（10 分）求曲线$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$所围的面积.

八、(10 分）计算第一型曲线积分$\oint_\Gamma (x^2+y^2+2z)ds$,其中$\Gamma$是$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x+y+z=0$相交的圆周.

九、(10 分）求第二型曲面积分$\oiint_\Sigma x^2dydz$,其中Σ是球面$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$的外侧.

十、(15 分）证明二元泰勒公式的唯一性:若

$$\sum_{i+j=0}^{n} A_{ij}x^i y^j + o(\rho^n)=0,(\rho\to 0),$$

其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,求证$A_{ij}=0$ (i,j为非负整数,$i+j=0,1,\cdots,n$).

十一、(10 分）设函数$f(x)$在$x=0$连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$,

求证：$f'(0)$存在，且$f'(0)=A$.

十二、(10 分）设$\alpha>0$，证明级数$1-\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^\alpha}+\cdots$ 只当$\alpha=1$时才收敛.