中 山 大 学

2019年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：867

科目名称：高等代数

考试时间：2018年12月23日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

符号说明：试卷中R表示实数域，F表示一般数域.

1. （20 分）试讨论a,b取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$有解？有解时求出一般解.

2. （10 分）证明实对称矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$正定.

3. （20 分）设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求 1）$A$的 Jordan 标准形；2）$A^{-1}$与$A^{2019}$.

4. （20 分）求k阶矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$的特征多项式与最小多项式.

5. （20 分）设实矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

（1）求正交矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵；

（2）记实线性空间$M_4(R)$中子空间$W=\{f(A)|\forall f(x)\in R[x]\}$. 求子空间$W$的维数和一组基.

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

6. （20 分）设非常数多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$，且 $(f(x), g(x)) = 1$.

1) 证明:存在唯一的 $u(x), v(x) \in F[x]$，使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ 并且 $\deg u(x) < \deg g(x)$，$\deg v(x) < \deg f(x)$；

2) 对 $f(x) = x^4 - x^3 - 3$，$g(x) = x^2 - x - 1$ 求上述 $u(x), v(x)$.

7. （10 分）设 m, n 为正整数,证明 $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$.

8. （10 分）设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times m$ 矩阵. 证明 $I_m - AB$ 可逆当且仅当 $I_n - BA$ 可逆.

9. （10 分）设 V 为 n 维欧氏空间，α_1，α_2，β_1，$\beta_2 \in V$，且有 $|\alpha_1| = |\beta_1|, |\alpha_2| = |\beta_2|$ 以及 $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)$. 证明存在 V 上的一个正交变换 σ 使得 $\sigma(\alpha_1) = \beta_1$，$\sigma(\alpha_2) = \beta_2$.

10. (10 分) 设 V 为 n 维欧氏空间，σ 是 V 上的对称变换. 证明 $tr\sigma = 0$ 当且仅当存在一组标准正交基使得 σ 在此基下的矩阵其对角线上的元素皆为 0.