中　山　大　学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：679

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：2018 年 12 月 23 日　上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一、　数学分析（共150分）

1. (15 分) 设 $a_n = \dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

2. (15 分) 设 $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求全微分 $df(1,1,1)$.

3. (15 分) 设 $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$，问在怎样的点集上 u 的梯度 $gradu$ 垂直于 z 轴.

4. (15 分) 计算积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$.

5. (15 分) 选取适当的变换计算积分 $\iint\limits_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dxdy$，其中闭区域 D 由直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 所围成.

6. (15 分) 计算曲线积分 $\int_L |y|\,ds$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$.

7. (15 分) 设 $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dv$ ，求 $F'(t)$.

8. (15 分) 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的.

9. (15 分) 利用幂级数求极限 $S = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}\right)$.

10. (15 分) 试将 $f(x) = \ln x$ 展开为 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.

二、高等代数 （共150分）

1. (15 分) 已知 $abcd=1$，求行列式 $D=\begin{vmatrix} a^2+1/a^2 & a & 1/a & 1 \\ b^2+1/b^2 & b & 1/b & 1 \\ c^2+1/c^2 & c & 1/c & 1 \\ d^2+1/d^2 & d & 1/d & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

2. (15 分) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 是 $n+1$ 个互不相同的数，$b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 是任意的 $n+1$ 个数，用克莱姆法则证明：一定存在唯一的次数不超过 n 的多项式

$$f(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n,$$

使 $$f(a_k)=b_k,\ (k=1,2,\cdots,n+1).$$

3. (15 分) 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1，η_2，η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1=(2,3,4,5)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$，求该方程组的通解.

4. (15 分) 设 ξ_1 与 ξ_2 是方程 $A_{m\times n}x=b$（$b\neq 0$）的两个不同解. 证明向量 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关.

5. (15 分) 设 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是 n 阶非零矩阵，且 a_{ij} 全为实数，若 $a_{ij}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,\cdots,n$），证明矩阵 A 的秩 $R(A)=n$.

6. (15 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$AX=2X+A$，求 X.

7. (20 分) 设 5 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$，其中 E 是 5 阶单位矩阵，已知 $A-2E$ 的秩 $R(A-2E)=2$.（1）求行列式 $|A-E|$ 的值；（2）判断 A 是否为正定矩阵？证明你的结论.

8. (20 分) 设 3 阶方阵 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-5$，对应的特征向量分别是 $p_1=(1,0,0)^T$，$p_2=(2,1,2)^T$，$p_3=(1,-2,1)^T$，求 A^{100}.

9. (20 分) 试证：二次型 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值恰好是矩阵 $\Phi=\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$ 的最大特征值和最小特征值.