

2023 年全国硕士研究生招生考试

数学二试题

考试时间:180 分钟, 试卷总分:150 分

一、选择题:1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x-1} \right)$ 的斜渐近线方程为

- A. $y = x + e$ B. $y = x + \frac{1}{e}$ C. $y = x$ D. $y = x - \frac{1}{e}$

2 函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x, & x > 0 \end{cases}$ 的一个原函数为

- A. $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$ B. $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$
- C. $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$ D. $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$

3. 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足: $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2 (n=1, 2, \dots)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时

- A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小 B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小
- C. x_n 与 y_n 是等价无穷小 D. x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小

4. 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则

- A. $a < 0, b > 0$ B. $a > 0, b > 0$
- C. $a = 0, b > 0$ D. $a = 0, b < 0$

5. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则

- A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在 B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在 D. $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

6. 若函数 $f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处取得最小值, 则 $\alpha_0 =$

- A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ B. $-\ln(\ln 2)$ C. $\frac{1}{\ln 2}$ D. $\ln 2$

7. 设函数 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y = f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是

- A. $[0, 1)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[1, 2)$ D. $[2, +\infty)$

8. 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, M^* 为矩阵 M 的伴随矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$

- A. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

9. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为

- A. $y_1^2 + y_2^2$ B. $y_1^2 - y_2^2$
C. $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$ D. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

10. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由 β_1, β_2

线性表示, 则 $\gamma =$

- A. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R$ B. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R$
C. $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R$ D. $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ _____

12. 曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^3} dt$ 的弧长为 _____

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由 $e^z + xz = 2x - y$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} =$ _____

14. 曲线 $3x^3 = y^5 + 2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为 _____

15. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____

16. 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数, 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ _____

三、解答题:17~22 小题, 共 70 分.

17. (本题满分 10 分) 设曲线 $L: y = y(x) (x > e)$ 经过点 $(e^2, 0)$, L 上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 在 L 上求一点, 使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小, 并求此最小面积.

18. (本题满分 12 分) 求函数 $f(x, y) = xe^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$ 的极值.

19. (本题满分 12 分) 已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

20. (本题满分 12 分) 设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $x^2 + y^2 - xy = 1, x^2 + y^2 - xy = 2$

与直线 $y = \sqrt{3}x, y = 0$ 围成, 计算 $\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$.

21. (本满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数. 证明:

(1) 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2} [f(a) + f(-a)]$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$.

22. (本题满分 12 分) 设矩阵 A 满足: 对任意 x_1, x_2, x_3 , 均有 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A ;

(2) 求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.